Ann. sc. math. Québec, 1988, vol. 12, no 2, pp. 179-187

UN THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE POUR DES INTÉGRALES BILINÉAIRES

Rafael Bravo de la Parra

Abstract

In [3] a mean value theorem for Dobrakov's integral is proved using the convexity structure introduced by Price [4], and his axiom. In this paper we obtain a theorem of the same type for Bartle type's integral of [7], which is a generalization, for e.l.c., of Bartle $\star$-integral (see [7, II]).

Résumé

Dans [3] on présente un théorème de la valeur moyenne pour l'intégrale de Dobrakov, en utilisant la structure de convexité introduite par Price [4], et son axiome. Dans cet article on obtient un théorème du même type pour l'intégrale type Bartle de [7], qui est une généralisation, pour e.l.c., de l'intégrale-$\star$ de Bartle (voir [7, II]).

1. Introduction

Le but de cet article est de présenter un théorème de la valeur moyenne pour des intégrales de fonctions intégrables au sens de Sivasankhara-Rao Chivukula ([7], [5]), en utilisant la structure de convexité introduite par Price [4], son axiome et la méthode développée dans la démonstration du théorème 4.4 de [3].

L'organisation de l'article est la suivante: la Section 2 présente une brève introduction à l'intégrale de Sivasankhara; la Section 3 expose la notion axiomatique de structure de convexité C dans un ensemble abstrait X, et la construction de la C-enveloppe dans le cas où X est un e.l.c.; finalement dans la Section 4, on établit le résultat fondamental de l'article basé sur l'axiome de Price.

2. Intégrale de Sivasankhara

On notera par Σ une σ-algèbre de sous-ensembles d'un ensemble Ω, par X, Y et Z trois e.l.c., où X et Z sont séparés et complets, et par P, Q et R trois familles génératrices de semi-normes de X, Y et Z respectivement. On notera par $(x,y) \dashrightarrow xy$ une application bilinéaire continue de $X \times Y$ dans Z, et par m une mesure dénombrablement additive de Σ dans Y, qui vérifie la $\star$-propriété (en suivant la notation de [7]), c'est-à-dire, que pour chaque $r \in R$ il existe une mesure finie et non négative ν_r définie dans Σ telle que $\|m\|_{B,r} \ll \nu_r$ pour chaque $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ étant la famille de tous les sous-ensembles bornés et absolument convexes de X et

$$\|m\|_{B,r}(E) = \sup r\left(\sum_{i=1}^{n} x_i m(E_i)\right) \qquad (E \in \Sigma)$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions finies de l'ensemble E, $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma$ et sur toutes les familles finies d'éléments $\{x_i\}_{i=1}^n \subset B$. Comme d'habitude, un ensemble $E \in \Sigma$ est dit m-nul si, et seulement si, $\|m\|_{B,r}(E) = 0$ pour chaque $B \in \mathcal{B}$ et pour chaque $r \in R$.

En suivant la notation usuelle de Grotendieck, pour chaque $B \in \mathcal{B}$, on notera par X_B le sous-espace linéaire généré par B, muni de la topologie définie par la fonctionnelle de Minkowsky p_B de B dans X_B.

Etant donnée une suite de fonctions $\{f_n\}$, $f_n\colon \Omega \to X_B$ pour chaque $n = 1,2,\ldots$, et une fonction $f\colon \Omega \to X_B$, on notera par $\{f_n\} \xrightarrow{(m,B)\text{-p.p.}} f$, la convergence presque partout de $\{f_n\}$ vers f, qui veut dire qu'il existe un ensemble m-nul tel que $p_B(f_n(t) - f(t)) \to 0$ ponctuellement dans Ω-E. On notera par $\{f_n\} \xrightarrow{(m,B)\text{-p.u.}} f$ la convergence presque uniforme de $\{f_n\}$ vers f, qui est définie de la façon suivante: étant donnés $\varepsilon > 0$ et $r \in R$, il existe un ensemble $E \in \Sigma$ tel que $\|m\|_{B,r}(E) < \varepsilon$ et $p_B(f_n(t) - f(t)) \to 0$ uniformément sur Ω-E. Le théorème 2.29 de [7] nous assure que: si $\{f_n\} \xrightarrow{(m,B)\text{-p.p.}} f$, alors $\{f_n\} \xrightarrow{(m,B)\text{-p.u.}} f$.

2.1. DÉFINITION [7]. Soit $B \in \mathcal{B}$. Une fonction $f: \Omega \to X$ est dite (m,B)-intégrable si, et seulement si, $Im(f) \subset X_B$ et il existe une suite de fonctions simples $\{f_n\}$, à valeurs dans X_B (les fonctions simples et leurs intégrales sont définies de la façon habituelle), telle que:

i) $\{f_n\} \xrightarrow{(m,B)\text{-p.p.}} f$, et

ii) pour $\varepsilon > 0$ et $r \in R$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon,r) > 0$ tel que $r\left(\int_E f_n\, dm\right) < \varepsilon$ pour chaque $n = 1,2,\ldots$ et chaque $E \in \Sigma$ avec $\|m\|_{B,r}(E) < \delta$.

Le théorème 2.41 ii de [7] prouve que toute fonction f (m,B)-intégrable satisfait la condition ii) de la Définition 2.1.

Une fonction $f: \Omega \to X$ est dite m-intégrable si et seulement si elle est (m,B)-intégrable quel que soit $B \in \mathcal{B}$.

Si f est (m,B)-intégrable et $E \in \Sigma$, on définit

$$\int_E^{(B)} f\, dm = \lim \int_E f_n\, dm,$$

où $\{f_n\}$ est une suite quelconque de fonctions simples qui vérifient i) et ii). Si f est m-intégrable on définit

$$\int_E f\, dm = \int_E^{(B)} f\, dm$$

pour un $B \in \mathcal{B}$ quelconque tel que f est (m,B)-intégrable.

3. Structures de convexité

3.1. DÉFINITION [3]. On dit qu'une famille C de sous-ensembles d'un ensemble X est une structure de convexité dans X si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

b) si $\mathcal{C}_o$ est une sous-famille de $\mathcal{C}$, $\bigcap_{C \in \mathcal{C}_o} C \in \mathcal{C}$,

c) $\{x\} \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in X$.

Pour chaque ensemble $S \subseteq X$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{C}(S) = \bigcap\{C \in \mathcal{C} : S \subseteq C\}$$

qu'on désignera par $\mathcal{C}$-enveloppe de S, et on dira que S est $\mathcal{C}$-convexe si $\mathcal{C}(S) = S$.

Suite à cette définition, la proposition suivante est immédiate.

3.2. PROPOSITION 3 . *Si* $\mathcal{C}$ *est une structure de convexité dans* X, *il découle:*

1. $S \subseteq \mathcal{C}(S)$,
2. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow \mathcal{C}(S_1) \subset \mathcal{C}(S_2)$,
3. $\mathcal{C}(\mathcal{C}(S)) = \mathcal{C}(S)$,
4. $S \in \mathcal{C}$ *si, et seulement si,* $\mathcal{C}(S) = S$.

On va exposer brièvement la construction de la structure de convexité que l'on utilisera dans la section suivante.

Dans la suite on considérera comme espace d'arrivée de l'application bilinéaire utilisée dans la définition de l'intégrale, le même espace X; ainsi on pourra identifier les éléments de l'espace Y avec les éléments de $L_c(X,X)$ (applications linéaires et continues de X dans X).

Soit l'ensemble $F_o = \{\{y_i\}_{i=1}^n : y_i \in Y,\ n = 1,2,\dots,\ \sum_{i=1}^n y_i = I\}$, où I désigne l'application identité sur X.

Soit F un ensemble de familles finies d'éléments de Y vérifiant la condition suivante: si $\{y_i\}_{i=1}^n \in F$ et $\sum_{i=1}^n y_i \neq 0$, alors $y = \sum_{i=1}^n y_i$ est un isomorphisme topologique.

Soit, donc, F' le sous-ensemble de F_o formé par toutes les familles de la forme $\{y^{-1}\cdot y_i\}_{i=n}^{n}$ ou $\{y_i\cdot y^{-1}\}_{i=1}^{n}$, où $\{y_i\}_{i=1}^{n} \in F$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i = y$, avec $y \neq 0$.

Soit, finalement, F^* le plus petit sous-ensemble qui contient F' et qui vérifie la propriété multiplicative suivante: si $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ et $\{y_j'\}_{j=1}^{m}$ appartiennent à F^*, alors $(y_1\cdot y_1',\ldots,y_1\cdot y_m',\ldots,y_n\cdot y_1',\ldots,y_n\cdot y_m') \in F^*$.

Si $\mathcal{C}$ est la famille de tous les sous-ensembles C de X qui vérifient que $\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \colon \{y_i\}_{i=1}^{n} \in F^*,\ \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset C\} \subset C$, alors $\mathcal{C}$ est une structure de convexité dans X.

Enonçons le lemme suivant que l'on utilisera dans la Section 4 (voir [2, lemme 1 b]).

3.3. LEMME. *Soit* $S \subseteq X$. *Alors pour chaque* $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ *famille finie d'éléments de* Y, *telle que* $\sum_{i=1}^{n} y_i = y$ *est un isomorphisme topologique et* $\{y_i\cdot y^{-1}\}_{i=1}^{n} \in F^*$, *on a que* $\sum_{i=1}^{n} (C(S)) \cdot y_i = C(S) \cdot y$.

4. Théorème de la valeur moyenne

Avant d'énoncer le résultat principal, on va énoncer des résultats préalables qui nous faciliteront sa démonstration.

4.1. LEMME. *Soient* $B \in \mathcal{B}$ *et* $f\colon \Omega \to X_B$ *une fonction* (m,B)-*intégrable, et soit* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite de fonctions simples, dont les images sont dans* X_B, *qui vérifie les conditions* i) *et* ii) *de la Définition* 2.1 *pour* f, *et qui converge uniformément vers* f *sur* $E \in \Sigma$. *Alors il existe une suite* $\{\phi_n'\}$ *de fonctions satisfaisant les mêmes conditions que* $\{\phi_n\}$, *et telle que* $\phi_n'(E) \subset f(E)$ *pour tout* $n = 1,2,\ldots$.

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que la suite $\{\phi_n'\}$ qu'on va définir aussitôt satisfait la thèse du lemme.

Pour chaque $n = 1,2,\ldots$ soit $\phi'_n|_{\Omega-E} \equiv \phi_n|_{\Omega-E}$ et $\phi'_n|_E = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\chi_{E_i}$ étant donné que $\phi_n|_E = \sum_{i=1}^{k} x_i\chi_{E_i}$ et t_i est un élément quelconque de E_i, pour $i = 1,\ldots,k$ avec $\{E_i\}_{i=1}^{k}$ une partition finie de E en éléments de Σ.

Dans les prochains résultats, on va utiliser la notation suivante: étant donnée une fonction f (m,B)-intégrable $(B \in \mathcal{B})$, $\Sigma(f) = \{F \in \Sigma$: f est limite uniforme sur F d'une suite de fonctions simples à valeurs dans $X_B\}$ et étant donné $E \in \Sigma$, $\Sigma_E(f) = \{F \in \Sigma(f)\colon F \subseteq E\}$.

On obtient, alors, facilement le lemme suivant.

4.2. LEMME. *Soient* $B \in \mathcal{B}$, $f\colon \Omega \to X_B$ *une fonction* (m,B)-*intégrable et* $F \in \Sigma$. *Alors il existe une suite* $\{\phi_n\}$ *de fonctions simples à valeurs dans* X_B *qui satisfait aux conditions* i) *et* ii) *de la Définition* 2.1 *pour* f, *et qui converge uniformément vers* f *sur* F.

On va énoncer aussitôt un résultat qui nous permettra d'obtenir $\int_E f\,dm$ quel que soit $E \in \Sigma$, à partir des intégrales $\int_F f\,dm$ pour les ensembles $F \in \Sigma_E(f)$. Celà sera très utile dans la démonstration du théorème de la valeur moyenne.

4.3. PROPOSITION. *Soient* $B \in \mathcal{B}$, $f\colon \Omega \to X_B$ *une fonction* (m,B)-*intégrable et* $E \in \Sigma$. *On a alors que:*

$$\int_E f\,dm = \lim_F \{\int_F f\,dm\}_{F\in\Sigma_E(f)}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est directe d'après (2.29) et (2.41 ii) de [7].

Pour établir le théorème de la valeur moyenne on va exiger les conditions suivantes:

La mesure $m\colon \Sigma \to L_c(X,X)$ doit satisfaire la généralisation suivante de l'axiome de Price, au cas des espaces e.l.c.: pour chaque $E \in \Sigma$, $m(E) = 0$ ou $m(E)$ est un isomorphisme topologique. De plus dans la construction de la structure de convexité exposée auparavant on doit poser:

$F = \{\{m(E_i)\}_{i=1}^n : E_i \in \Sigma$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i = j$, $1 \leq i$, $j \leq n$, $n = 1,2,..\}$.

Maintenant nous sommes dans les conditions pour énoncer et démontrer le théorème de la valeur moyenne.

4.4. THÉORÈME. *Soit* $m: \Sigma \to L_c(X,X)$ *une mesure qui satisfait l'axiome de Price. Soient* $B \in \mathcal{B}$, f *une fonction* (m,B)*-intégrable, et* $E \in \Sigma$ *tel que* $m(E) \neq 0$. *Alors il existe un unique élément* $x \in \overline{C(f(E))}$ *qui vérifie:*

$$\int_E f\, dm = x\, m(E).$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition de F et le Lemme 3.3, pour chaque partition $\{E_i\}_{i=1}^n$ de Ω en des éléments de Σ, et chaque famille $\{t_i\}_{i=1}^n$ telle que $t_i \in E_i \cap E$, $i = 1,\dots,n$, il en découle que:

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) m(E_i \cap E) \in C(f(E)) m(E). \tag{1}$$

Tout d'abord nous allons prouver le résultat pour $E \in \Sigma(f)$.

Les Lemmes 4.1 et 4.2 nous permettent d'assurer l'existence d'une suite $\{\phi_n\}$ de fonctions simples à valeurs dans X_B qui puisse satisfaire les conditions i) et ii) de la Définition 2.1 pour f, qui converge uniformément vers f sur E, et telle que $\phi_n(E) \subset f(E)$ pour chaque $n = 1,2,\dots$. Alors il en découle que $\int_E f\, dm = \lim \int_E \phi_n\, dm$, et d'après (1) on peut conclure que $\int_E f\, dm \in \overline{C(f(E))m(E)}$. Donc, puisque $m(E)$ est un isomorphisme topologique, il existe un unique élément $x \in \overline{C(f(E))}$ tel que $\int_E f\, dm = x\, m(E)$.

Si l'on considère maintenant un ensemble quelconque $E \in \Sigma$, la Proposition 4.3 nous assure que:

$$\int_E f\, dm = \lim_F \{\int_F f\, dm\}_{F \in \Sigma_E(f)}. \tag{2}$$

$x_0 \in f(E)$ ayant été choisi, on va définir, pour chaque $F \in \Sigma_E(f)$, la fonction f_F de la façon suivante: $f_F(t) = f(t)$ pour chaque $t \in F$ et $f_F(t) = x_0$ pour chaque $t \in E-F$. Alors on vérifie que $f_F(E) \subset f(E)$, et que $E \in \Sigma(f_F)$. Il existe, donc, un unique $x_F \in \overline{C(f_F(E))} \subset \overline{C(f(E))}$ tel que

$$\int_E f_F \, dm = x_F \, m(E). \tag{3}$$

D'autre part, pour chaque $r \in R$, on a $r(\int_{E-F} f \, dm) \leq p_B(x_o)\|m\|_{B,r}(E,F)$. En plus, puisque f est une fonction (m,B)-intégrable, d'après la proposition (2.27) de [7], il en découle que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $F \in \Sigma_E(f)$ tel que $\|m\|_{B,r}(E-F) < \varepsilon$. Donc on peut en conclure que

$$\lim_F \{\int_{E-F} f_F \, dm\}_{F\in\Sigma_E(f)} = 0. \tag{4}$$

Alors d'après (2), (3) et (4) on déduit que

$$\begin{aligned}\int_E f \, dm &= \lim_F \{\int_E f_F \, dm - \int_{E-F} f_F \, dm\}_{F\in\Sigma_E(f)} \\ &= \lim_F \{x_F \, m(E)\}_{F\in\Sigma_E(f)} - \lim_F \{\int_{E-F} f_F \, dm\}_{F\in\Sigma_E(f)} \\ &= \lim_F \{x_F \, m(E)\}_{F\in\Sigma_E(f)}, \text{ avec } x_F \in \overline{C(f(E))} \text{ pour chaque } F \in \Sigma_E(f).\end{aligned}$$

Donc, puisque m(E) est un isomorphisme topologique, il en découle que $x = \lim_F \{x_F\}_{F\in\Sigma_E(f)}$ est l'unique élément de $\overline{C(f(E))}$ qui vérifie:

$$\int_E f \, dm = x \, m(E).$$

Bibliographie

[1] BRAVO, R., *Tópicos en integración bilineal vectorial*, Tésis doctoral U.N.E.D., Madrid, 1986.

[2] DOBRAKOV, I., MORALES, P., On integration in Banach spaces, VI, *Czech. Math. J.* 35(110), Praha 25, 1985, no 2, 173-187.

[3] MORALES, P., Mean value theorem for the Dobrakov integral, *Procd. Conf. Northern Illinois Univ. De Kall*, I 11(1981), 235-242.

[4] PRICE, G.B., The theory of integration, *Trans. Amer. Math. Soc.* 47(1940), 1-50.

[5] RAO CHIVUKULA, R., SASTRY, A.S., Product vector measures via Bartle integrals, *J. Math. Anal.* 96(1983), 180-195.

[6] RODRIGUEZ SALAZAR, S., *Integración general en espacios localmente convexos*, Tésis Doctoral, Madrid, 1985.

[7] SIVASANKHARA, S.A., *Vector Integrals and Product of Vector Measures*, Ph.D. Thesis, Univ. Microfilm Inter, Michigan, 1983.

Departamento de matematicas fundamentales
Facultad de ciencias
U.N.E.D.
Ciudad Universitaria
Madrid 28040
Espagne

Manuscrit reçu le 22 avril 1987.
Revisé le 1er août 1987.